

Битовые операции в задачах КИМ ЕГЭ по информатике.

Часть II

К.Ю. Поляков,
д.т.н., учитель информатики ГБОУ СОШ № 163,
г. Санкт-Петербург

В данной статье рассматриваются задачи следующего типа (впервые эти задачи появились в КИМ на ЕГЭ 2015 года):

Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи).

1. Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a = 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

2. Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 29 = 0) \rightarrow (x \& 43 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Предлагается и обосновывается новый подход к решению таких задач, основанный на идее **А.В. Здвижковой** (г. Армавир).

Обозначения

Через Z_K обозначим множество чисел, которые в результате поразрядной конъюнкции с числом K дают 0:

$$Z_K = \{x : x \& K = 0\}.$$

Соответственно, числа, которые в результате поразрядной конъюнкции с числом K дают ненулевое значение, составляют множество $\bar{Z}_K$:

$$\bar{Z}_K = \{x : x \& K \neq 0\}.$$

Введём утверждения

$$Z_K(x) = (x \in Z_K), \quad \bar{Z}_K(x) = (x \in \bar{Z}_K).$$

Для сокращения записи будем вместо $Z_K(x)$ и $\bar{Z}_K(x)$ писать соответственно Z_K и $\bar{Z}_K$.

Нашей целью будет поиск чисел a , при которых некоторое логическое выражение, зависящее от a , истинно для любых натуральных значений x . Будет обозначать через A выражение $Z_a(x)$.

Два свойства импликации

Сначала докажем два свойства импликации, которые будут нам нужны далее¹.

Свойство 1. Следующее равенство тождественно истинно:

$$A \rightarrow (B + C) = (A \rightarrow B) + (A \rightarrow C)$$

¹ Автору не удалось обнаружить их в известной литературе, хотя они легко доказываются.

Доказательство. Представим левую и правую часть равенства через операции ИЛИ и НЕ:

$$A \rightarrow (B + C) = \bar{A} + B + C$$

$$(A \rightarrow B) + (A \rightarrow C) = \bar{A} + B + \bar{A} + C = \bar{A} + B + C$$

В обоих случаях получили одинаковые выражения, что и требовалось доказать.

Свойство 2. Следующее равенство тождественно истинно:

$$A \rightarrow (B \cdot C) = (A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C)$$

Доказательство. Представим левую и правую часть равенства через операции ИЛИ и НЕ:

$$A \rightarrow (B \cdot C) = \bar{A} + B \cdot C$$

$$(A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C) = (\bar{A} + B) \cdot (\bar{A} + C) = \bar{A} + B \cdot C$$

При упрощении второго выражения использован распределительный закон. В результате в обоих случаях получили одинаковые выражения, что и требовалось доказать.

Математическое обоснование метода

В этом разделе мы докажем несколько утверждений, на которых основан предлагаемый метод решения.

Утверждение 1. Пусть логическое выражение Z_K истинно для некоторого натурального числа x . Тогда все биты двоичной записи числа x , соответствующие единичным битам двоичной записи числа K , нулевые.

Доказательство. Пусть k_i – i -ый бит числа K (находящийся в i -м разряде его двоичной записи) – равен 1. По условию для числа x истинно логическое выражение

$$Z_K(x) = (x \& K = 0).$$

Тогда в результате конъюнкции с соответствующим i -м битом двоичной записи числа x , который обозначим как x_i , получаем $x_i \& k_i = 0$. Поскольку по условию $k_i = 1$, это возможно только при $x_i = 0$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. Логическое выражение $Z_K \rightarrow Z_M$ истинно для всех x тогда и только тогда, когда множество единичных битов двоичной записи числа M входит во множество единичных битов двоичной записи числа K .

Доказательство. Пусть множество единичных битов числа M :

$$B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$$

входит во множество единичных битов числа K :

$$B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$$

и пусть для некоторого x выполняется условие Z_K . Это значит, что все биты числа x с номерами $k_1, k_2, \dots, k_p$ равны 0. Поскольку любой единичный бит числа M входит в это множество, истинно также и условие Z_M .

Предположим обратное: условие $Z_K \rightarrow Z_M$ истинно для всех x . Пусть при этом один из единичных битов числа M , скажем, бит с номером m_1 , не входит во множество B_K . Это

значит, что для любого числа x , в котором все биты из множества B_K равны 0, а бит m_1 равен 1, высказывание Z_K будет истинно, а Z_M – ложно, так что высказывание $Z_K \rightarrow Z_M$ истинно не для всех x . Получили противоречие, что и доказывает вторую часть утверждения.

Утверждение 3. Для любого натурального x справедливо равенство:

$$(Z_K \cdot Z_M) = Z_{K \text{ or } M},$$

где **or** обозначает поразрядную дизъюнкцию между двоичной записью чисел K и M .

Доказательство. Обозначим множества единичных битов чисел K и M через

$$B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}, \quad B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$$

Пусть одновременно истинны логические выражения Z_K и Z_M . Тогда логическое выражение Z_N истинно для всех N , у которых множество единичных битов

$$B_N = \{n_1, n_2, \dots, n_w\}$$

таково, что каждый из них входит во множество B_K или во множество B_M . В частности, одно из таких чисел – это $N = K \text{ or } M$.

Напротив, пусть $N = K \text{ or } M$. При этом все единичные биты двоичной записи чисел K и M входят во множество B_N . Из утверждения 2 следует, что одновременно истинны выражения Z_K и Z_M , то есть истинно $Z_K \cdot Z_M$. Утверждение доказано.

Утверждение 4. При любых натуральных числах K и M существуют значения x , при которых логическое выражение $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$ ложно.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

1) Множество единичных битов числа M , $B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$, входит во множество единичных битов числа K , $B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$. Если при этом истинно Z_K , то все биты из множества B_K равны нулю. Среди этих битов не может быть ненулевых. Поэтому высказывание $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$ ложно для всех x , для которых истинно Z_K .

2) Множество B_M содержит биты, не входящие во множество B_K . При этом высказывание $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$ ложно для всех x , для которых истинно Z_K и, кроме того, все биты, входящие во множество B_M , равны нулю.

Утверждение 5. При любых натуральных числах K и M существуют значения x , при которых логическое выражение $Z_K \rightarrow Z_M \cdot \bar{Z}_N$ ложно.

Доказательство. Применим доказанное выше свойство 2 импликации:

$$Z_K \rightarrow Z_M \cdot \bar{Z}_N = (Z_K \rightarrow Z_M) \cdot (Z_K \rightarrow \bar{Z}_N)$$

В силу утверждения 4 второй сомножитель, $Z_K \rightarrow \bar{Z}_N$, равен нулю хотя бы для некоторых x , что доказывает утверждение.

Утверждение 6. Пусть выражение $Z_K \rightarrow Z_N$ истинно при любом натуральном x . Тогда выражение $Z_K \rightarrow (A + Z_N)$ истинно для всех x при любом выборе a .

Доказательство. Применим доказанное выше свойство 1 импликации:

$$Z_K \rightarrow (A + Z_N) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_N)$$

Так как второе слагаемое истинно при любых x , результат не зависит от первого слагаемого, то есть от выбора a .

Утверждение 7. Пусть выражение $Z_K \rightarrow Z_N$ ложно при некотором натуральном x . Тогда выражение $Z_K \rightarrow (A + Z_N)$ истинно для всех x при условии, что $Z_K \rightarrow A = 1$.

Доказательство. Применим доказанное выше свойство 1 импликации:

$$Z_K \rightarrow (A + Z_N) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_N)$$

Если первое слагаемое истинно при любых x , то и левая часть равенства тоже истинна. Что и требовалось доказать.

Утверждение 8. Пусть выражение $Z_K + Z_M$ истинно при некотором натуральном x . Тогда истинно выражение $Z_{K \& M}$.

Доказательство. Обозначим множества единичных битов чисел K и M через

$$B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}, \quad B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$$

Пусть для некоторого x истинно одно из логических выражений, Z_K или Z_M . Истинность Z_K означает, что в числе x биты с номерами $k_1, k_2, \dots, k_p$ – нулевые, истинность Z_M означает, что в числе x биты с номерами $m_1, m_2, \dots, m_q$ – нулевые. В любом случае биты, которые входят в оба множества, и в $B_K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$, и в $B_M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ – нулевые. Соответствующее число можно получить как результат поразрядной операции «И» между числами K и M . Утверждение доказано.

Необходимо отметить, что обратное высказывание неверно: если $Z_{K \& M}$ истинно, то это совершенно не означает, что истинно $Z_K + Z_M$. Контрпример: пусть при $K = 3$ и $M = 5$ истинно выражение $Z_{K \& M} = Z_{3 \& 5} = Z_1$, то есть бит 0 числа x равен нулю. Этому условию соответствует любое чётное число, например, $x = 6$, в котором биты 1 и 2 равны 1, то есть $Z_K(6) = Z_3(6) = 0$ и $Z_M(6) = Z_5(6) = 0$.

Утверждение 9. Минимальное натуральное число a , при котором истинно выражение $A \rightarrow (Z_K + Z_M)$, равно $\min(K, M)$.

Доказательство. Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$A \rightarrow (Z_K + Z_M) = (A \rightarrow Z_K) + (A \rightarrow Z_M)$$

Как следует из Утверждения 2, при $A = K$ или $A = M$ это выражение равно 1 при всех x , так как, по крайней мере, одно из слагаемых равно 1. Таким образом, при $a = \min(K, M)$ утверждение верно.

Докажем, что нет меньшего подходящего a , используя метод «от противного»: пусть существует такое a , меньшее, чем $\min(K, M)$, при котором $A \rightarrow (Z_K + Z_M) = 1$ для всех натуральных x .

Поскольку $a < K$, двоичная запись числа K содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа a (обозначим это множество битов через B_K^0). Поэтому для всех

чисел x , у которых все единичные биты числа a также равны 1, но ещё есть единичные биты из множества B_K^0 , получаем $A \rightarrow Z_K = 1 \rightarrow 0 = 0$.

Аналогично двоичная запись числа M содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа a (обозначим это множество через B_M^0). Поэтому для всех чисел x , у которых все единичные биты числа a также равны 1, но ещё есть единичные биты из множества B_M^0 , получаем $A \rightarrow Z_M = 1 \rightarrow 0 = 0$. Таким образом, для всех чисел, в двоичной записи которых все единичные биты числа a равны 0, но есть ещё единичные биты, входящие во множества B_K^0 и B_M^0 , оба слагаемых равны 0, так что все выражение ложно. Что и требовалось доказать.

Утверждение 10. Пусть $Z_K \rightarrow Z_M = 0$. Тогда $Z_K \rightarrow (A + Z_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_K \rightarrow A = 1$.

Доказательство. Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$Z_K \rightarrow (A + Z_M) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_M).$$

Во-первых, если $Z_K \rightarrow A = 1$, то сразу $Z_K \rightarrow (A + Z_M) = 1$.

Чтобы доказать обратное, рассмотрим слагаемое $Z_K \rightarrow Z_M$. Обозначим через B_K множество единичных битов двоичной записи числа K , а через B_M^0 – множество единичных битов в двоичной записи числа M , которые равны 0 в двоичной записи числа K .

Выражение $Z_K \rightarrow Z_M$ ложно для всех x , в двоичной записи которых все биты из множества B_K равны 0, а среди битов из множества B_M^0 есть единичные. Если для этих значения x истинно выражение $Z_K \rightarrow (A + Z_M)$, то это значит, что для них $Z_K \rightarrow A = 1$. Поскольку в двоичной записи всех таких x все биты из множества B_K равны нулю, то $Z_K \rightarrow A = 1$ для всех натуральных x , что и требовалось доказать.

Утверждение 11. $Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A = 1$.

Доказательство. Согласно Свойству 1, представим выражение в виде

$$Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow \bar{Z}_M).$$

Рассмотрим слагаемое $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$. Обозначим через B_K множество единичных битов двоичной записи числа K , а через B_M – множество единичных битов в двоичной записи числа M . Как следует из доказательства Утверждения 4, выражение $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$ ложно для всех x , в двоичной записи которых все биты из множеств B_K и B_M равны 0. Таким образом, выражение $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$ ложно тогда, когда истинно $Z_{K \text{ or } M}$, и истинно тогда, когда истинно $\overline{Z_{K \text{ or } M}}$. Поэтому можно выполнить замену $Z_K \rightarrow \bar{Z}_M$ на $\overline{Z_{K \text{ or } M}}$:

$$\begin{aligned} Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) &= (Z_K \rightarrow A) + \overline{Z_{K \text{ or } M}} = \bar{Z}_K + \overline{Z_{K \text{ or } M}} + A \\ &= (Z_K \cdot Z_{K \text{ or } M}) \rightarrow A = Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A \end{aligned}$$

Поскольку в силу Утверждения 3 имеем $Z_K \cdot Z_{K \text{ or } M} = Z_{K \text{ or } M}$, получаем

$$Z_K \rightarrow (A + \bar{Z}_M) = Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A.$$

Утверждение 12. Пусть $Z_K \rightarrow Z_L = 0$. Тогда $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_K \rightarrow A = 1$.

Доказательство. Представим выражение в виде

$$Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L \cdot \bar{Z}_M).$$

Во-первых, если $Z_K \rightarrow A = 1$, то сразу $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$.

Чтобы доказать обратное, рассмотрим второе слагаемое, преобразуя его согласно Свойству 2:

$$Z_K \rightarrow (Z_L \cdot \bar{Z}_M) = (Z_K \rightarrow Z_L) \cdot (Z_K \rightarrow \bar{Z}_M).$$

Предположим, что для некоторого a выражение $Z_K \rightarrow A$ ложно при некоторых x , но $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$ для всех x . Поскольку $Z_K \rightarrow A$ ложно при некоторых x , двоичная запись числа a содержит единичные биты, которые равны 0 в двоичной записи числа K . Так как по условию двоичная запись числа L содержит единичные биты, которые равны 0 в двоичной записи числа K , то для значений x , в двоичной записи которых эти «лишние» биты равны 1, имеем $Z_K \rightarrow Z_L = 0$, так что всё выражение равно 0. Получили противоречие. Следовательно, $Z_K \rightarrow A = 1$.

Утверждение 13. Пусть $Z_K \rightarrow Z_L = 1$. Тогда $Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) = 1$ тогда и только тогда, когда $Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A = 1$.

Доказательство. Используя доказанные выше утверждения, преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} Z_K \rightarrow (A + Z_L \cdot \bar{Z}_M) &= (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L \cdot \bar{Z}_M) = \\ &= (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L) \cdot (Z_K \rightarrow \bar{Z}_M). \\ &= (Z_K \rightarrow A) + (Z_K \rightarrow Z_L) \cdot \overline{Z_{K \text{ or } M}} \end{aligned}$$

Поскольку по условию множество единичных битов двоичной записи числа L является подмножеством множества единичных битов числа K , то $Z_K \rightarrow Z_L = 1$ для всех x . Поэтому выражение далее преобразуется так же, как и при доказательстве Утверждения 11:

$$\begin{aligned} (Z_K \rightarrow A) + \overline{Z_{K \text{ or } M}} &= 1 \\ \bar{Z}_K + A + \overline{Z_{K \text{ or } M}} &= 1 \\ \overline{Z_K \cdot Z_{K \text{ or } M}} + A &= 1 \\ Z_{K \text{ or } M} \rightarrow A &= 1 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Общий метод решения

Идея метода решения, предложенная **А.В. Здвижковой**, состоит в следующем:

- 1) упростить логическое выражение так, чтобы свести его к импликации и избавиться от всех инверсий;
- 2) применить утверждения 3-7 с целью свести задачу к форме, в которой можно использовать утверждение 2.

Упрощение может привести к нескольким разным формам выражения, например,

- 1) $(Z_K \cdot A) \rightarrow Z_N$
- 2) $Z_K \rightarrow A$
- 3) $Z_K \rightarrow (A + Z_N)$
- 4) $Z_K \rightarrow (A \cdot Z_N)$

В первом случае $Z_K \cdot A = Z_{K \text{ or } a}$, так что с помощью числа a можно добавить в левую часть единичные биты числа N , которых нет во множестве единичных битов числа K .

Во втором случае согласно утверждению 2 число a должно быть выбрано так, чтобы все его единичные биты входили во множество единичных битов числа K .

В третьем случае с помощью утверждений 6 и 7 можно либо свести задачу ко второму случаю, либо придти к выводу от том, что число a можно выбрать произвольно.

В четвёртом случае решение не всегда существует: с помощью числа a можно добавить в правую часть единичные биты, но нельзя их убрать. Поэтому если множество единичных битов числа N не является подмножеством единичных битов числа K , задача не имеет решения (при любом выборе a выражение будет ложно при некоторых значениях x).

Примеры

Пример 1. Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& 53 \neq 0) \rightarrow ((x \& 41 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $\bar{Z}_{53} \rightarrow (Z_{41} \rightarrow \bar{A})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле $A \rightarrow B = \bar{A} + B$:

$$\bar{Z}_{53} \rightarrow (Z_{41} \rightarrow \bar{A}) = Z_{53} + (Z_{41} \rightarrow \bar{A}) = Z_{53} + \bar{Z}_{41} + \bar{A}$$

Теперь избавляемся от инверсий, применяя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$Z_{53} + \bar{Z}_{41} + \bar{A} = (\overline{Z_{41} \cdot A}) + Z_{53} = (Z_{41} \cdot A) \rightarrow Z_{53}.$$

Применяем утверждение 3:

$$(Z_{41} \cdot A) \rightarrow Z_{53} = Z_{41 \text{ or } a} \rightarrow Z_{53}.$$

Таким образом, с помощью числа a мы должны добавить в левую часть недостающие биты – те, которые есть в двоичной записи числа 53, но отсутствуют в двоичной записи числа 41:

разряды 5 4 3 2 1 0

41 = 101001

53 = 110101

Биты, которые обязательно должны быть в числе a – это биты в разрядах 4 и 2 (выделены фоном), поэтому минимальное значение числа $a_{\min} = 2^4 + 2^2 = 20$. Можно выбрать и любое другое значение a , в двоичной записи которого эти биты равны 1.

Пример 2. Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 20 = 0) \rightarrow (x \& 5 \neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $\bar{A} \rightarrow (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5)$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле $A \rightarrow B = \bar{A} + B$:

$$\bar{A} \rightarrow (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) = A + (Z_{20} \rightarrow \bar{Z}_5) = A + \bar{Z}_{20} + \bar{Z}_5$$

Теперь избавляемся от инверсий, применяя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$A + \bar{Z}_{20} + \bar{Z}_5 = (\overline{Z_{20} \cdot Z_5}) + A = (Z_{20} \cdot Z_5) \rightarrow A.$$

Согласно утверждению 3, $Z_{20} \cdot Z_5 = Z_{20 \text{ or } 5}$. Вычисляем

разряды 4 3 2 1 0

20 = 10100

5 = 00101

20 or 5 = 10101 = 21

Таким образом, получили $Z_{21} \rightarrow A = 1$. Согласно утверждению 2, все единичные биты числа a должны присутствовать в числе 21. Поэтому максимальное значение $a_{\max} = 21$. Кроме того, можно взять и другие значения a , которые не содержат в двоичной записи других единичных битов, кроме 4-го, 2-го и 0-го (это 1, 4, 5, 16, 17 и 21).

Пример 3. Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 12 = 0) \rightarrow (x \& 21 = 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $\bar{A} \rightarrow (Z_{12} \rightarrow Z_{21})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации по формуле $A \rightarrow B = \bar{A} + B$:

$$\bar{A} \rightarrow (Z_{12} \rightarrow Z_{21}) = A + (Z_{12} \rightarrow Z_{21}) = A + \bar{Z}_{12} + Z_{21}$$

Теперь избавляемся от инверсий, переходя к импликации:

$$A + \bar{Z}_{12} + Z_{21} = Z_{12} \rightarrow (A + Z_{21}).$$

Согласно свойству 1 импликации, $Z_{12} \rightarrow (A + Z_{21}) = (Z_{12} \rightarrow A) + (Z_{12} \rightarrow Z_{21})$. Двоичная запись числа $21 = 10101_2$ содержит единичные биты, которые не входят во множество единичных битов числа $12 = 1100_2$. Поэтому по утверждению 7 задача сводится к обеспечению условия $Z_{12} \rightarrow A = 1$.

Согласно утверждению 2, все единичные биты числа a должны присутствовать в числе 12. Поэтому максимальное значение $a_{\max} = 12$. Кроме того, можно взять и другие значения a , которые не содержат в двоичной записи других единичных битов, кроме 3-го и 2-го (это 4, 8 и 12).

Пример 4. Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$((x \& 28 \neq 0) \vee (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& 48 = 0) \rightarrow (x \& a \neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $(\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}) \rightarrow (Z_{48} \rightarrow \bar{A})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликации:

$$(\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}) \rightarrow (Z_{48} \rightarrow \bar{A}) = \bar{\bar{Z}_{28} + \bar{Z}_{45}} + (Z_{48} \rightarrow \bar{A}) = Z_{28} \cdot Z_{45} + \bar{Z}_{48} + \bar{A}$$

Теперь избавляемся от инверсий, используя закон де Моргана и переходя к импликации:

$$Z_{28} \cdot Z_{45} + \bar{Z}_{48} + \bar{A} = \bar{Z}_{48} \cdot \bar{A} + Z_{28} \cdot Z_{45} = (Z_{48} \cdot A) \rightarrow (Z_{28} \cdot Z_{45})$$

Упрощаем выражение в правой части, используя утверждение 3: $Z_{28} \cdot Z_{45} = Z_{28 \text{ or } 45}$. Вычисляем:

разряды 5 4 3 2 1 0

28 = 0 1 1 1 0 0

45 = 1 0 1 1 0 1

28 or 45 = 1 1 1 1 0 1 = 61

Нам нужно обеспечить истинность выражения $(Z_{48} \cdot A) \rightarrow Z_{61}$ при всех x . Согласно утверждению 2 для этого необходимо, чтобы множество битов числа 61 входило во множество битов числа 48 **or** a , то есть с помощью a мы можем добавить недостающие биты:

разряды 5 4 3 2 1 0

48 = 1 1 0 0 0 0

61 = 1 1 1 1 0 1

Биты, которые обязательно должны быть в числе a – это биты в разрядах 3, 2 и 0 (выделены фоном), поэтому минимальное значение числа $a_{\min} = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13$. Можно выбрать и любое другое значение a , в двоичной записи которого эти биты равны 1.

Пример 5. (А.Г. Гильдин). Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$(x \& 19 = 0) \wedge (x \& 38 \neq 0) \vee ((x \& 43 = 0) \rightarrow ((x \& a = 0) \wedge (x \& 43 = 0)))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38} + (Z_{43} \rightarrow (A \cdot Z_{43}))$. Упрощаем выражение, приводя его к импликации:

$$Z_{43} \rightarrow ((A \cdot Z_{43}) + (Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38}))$$

Согласно свойству 1 импликации,

$$Z_{43} \rightarrow ((A \cdot Z_{43}) + (Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38})) = (Z_{43} \rightarrow A \cdot Z_{43}) + (Z_{43} \rightarrow Z_{19} \cdot \bar{Z}_{38})$$

По утверждению 12, второе слагаемое в правой части можно отбросить, поэтому остается обеспечить истинность выражения $Z_{43} \rightarrow A \cdot Z_{43}$.

В силу утверждений 3 и 2, множество единичных битов числа a **or** 43 должно входить во множество единичных битов числа 43. Поэтому число a может содержать единичные биты только в тех разрядах, где они есть в двоичной записи числа 43. Таким образом, $a_{\max} = 43$. Кроме этого, можно использовать и другие значения a , все единичные биты которых входят во множество единичных битов числа 43: это 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42 и 43.

Пример 6. (М.В. Кузнецова). Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$((x \& 13 \neq 0) \vee (x \& a \neq 0)) \rightarrow (x \& 13 \neq 0) \vee ((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 39 = 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $((\bar{Z}_{13} + \bar{A}) \rightarrow \bar{Z}_{13}) + \bar{A} \cdot Z_{39}$. Упрощаем выражение, раскрывая импликацию:

$$((\bar{Z}_{13} + \bar{A}) \rightarrow \bar{Z}_{13}) + \bar{A} \cdot Z_{39} = \overline{\bar{Z}_{13} + \bar{A}} + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39} = Z_{13} \cdot A + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39}$$

Применяем распределительный закон

$$Z_{13} \cdot A + \bar{Z}_{13} = (Z_{13} + \bar{Z}_{13}) \cdot (A + \bar{Z}_{13}) = A + \bar{Z}_{13}$$

Получаем

$$Z_{13} \cdot A + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39} = A + \bar{Z}_{13} + \bar{A} \cdot Z_{39}$$

Используем распределительный закон ещё раз

$$A + \bar{A} \cdot Z_{39} = (A + \bar{A}) \cdot (A + Z_{39}) = A + Z_{39}$$

так что выражение сводится к $A + \bar{Z}_{13} + Z_{39}$. Теперь избавляемся от инверсий, переходя к импликации:

$$A + \bar{Z}_{13} + Z_{39} = Z_{13} \rightarrow (A + Z_{39}).$$

По свойству 1 импликации имеем

$$Z_{13} \rightarrow (A + Z_{39}) = (Z_{13} \rightarrow A) + (Z_{13} \rightarrow Z_{39})$$

Поскольку число $39 = 100111_2$ содержит единичные биты, которых нет в числе $13 = 1101_2$, второе слагаемое, $Z_{13} \rightarrow Z_{39}$, равно 0 (ложно для каких-то x), поэтому остается обеспечить только равенство $Z_{13} \rightarrow A = 1$. В силу утверждения 2, для этого требуется, чтобы двоичная запись числа a имела единичные биты только там, где есть единичные биты в числе 13. Поэтому $a_{\max} = 13$.

Кроме того, условие выполнено при выборе $a = 1, 4, 5, 8, 9, 12$ и 13 . Количество этих решений несложно подсчитать. Число 13 содержит $m = 3$ ненулевых бита, в числе a каждый из них может быть равен 0 или 1. Поэтому общее количество возможных комбинаций равно 2^m . Учитывая, что нас интересуют только натуральные числа, нельзя выбрать все эти биты нулевыми, поэтому один вариант исключается. Итог: количество решений на множестве натуральных чисел равно $2^m - 1$.

Отметим, что если в этой задаче вместо чисел 13 и 39 взять, например, числа 53 и 21, то выражение истинно при любом выборе a (см. утверждение 6). Это связано с тем, что все единичные биты числа $21 = 10101_2$ входят во множество единичных битов числа $53 = 110101_2$.

Пример 7. Определите наибольшее натуральное число a , такое что выражение

$$((x \& 46 = 0) \vee (x \& 18 = 0)) \rightarrow ((x \& 115 \neq 0) \rightarrow (x \& a = 0)))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $(Z_{46} + Z_{18}) \rightarrow (\bar{Z}_{115} \rightarrow A)$. Упрощаем выражение, раскрыв вторую импликацию и избавившись от инверсий:

$$(Z_{46} + Z_{18}) \rightarrow (Z_{115} + A)$$

Преобразуем левую часть согласно Утверждению 8:

$$Z_{46} + Z_{18} \Rightarrow Z_{46 \& 18} = Z_2$$

и получаем таким образом (с помощью свойства 1 импликации)

$$Z_2 \rightarrow (Z_{115} + A) = (Z_2 \rightarrow Z_{115}) + (Z_2 \rightarrow A)$$

Первая импликация в сумме равна 0, так как двоичная запись числа 115 содержит единичные биты, которых нет в двоичной записи числа 2. Поэтому требуется обеспечить истинность второй импликации, $Z_2 \rightarrow A$. Для этого множество единичных битов числа a должно входить во множество единичных битов числа 2 (а это единственный бит в 1-м разряде). Поэтому единственное натуральное число a , удовлетворяющее условию – это 2.

Пример 8. Определите наименьшее натуральное число a , такое что выражение

$$((x \& 23 \neq 0) \wedge (x \& 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \& a \neq 0) \wedge (x \& 23 \neq 0))$$

тождественно истинно.

Решение. Используя обозначения, приведенные в начале статьи, запишем выражение в виде $(\overline{Z_{23}} \cdot \overline{Z_{45}}) \rightarrow (\overline{A} \cdot \overline{Z_{23}})$. Упрощаем выражение, раскрывая импликацию и избавляясь от инверсий:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{Z_{23}} \cdot \overline{Z_{45}}} + \overline{A} \cdot \overline{Z_{23}} &= Z_{23} + Z_{45} + \overline{A} \cdot \overline{Z_{23}} = (Z_{23} + \overline{A}) \cdot (Z_{23} + \overline{Z_{23}}) + Z_{45} = \\ &= Z_{23} + \overline{A} + Z_{45} = A \rightarrow (Z_{23} + Z_{45}) \end{aligned}$$

Преобразуем левую часть согласно Свойству 1 импликации:

$$A \rightarrow (Z_{23} + Z_{45}) = (A \rightarrow Z_{23}) + (A \rightarrow Z_{45}).$$

Таким образом, нужно обеспечить выполнение для всех x одного из условий:

$$A \rightarrow Z_{23} = 1 \text{ или } A \rightarrow Z_{45} = 1.$$

Первое из них верно при минимальном значении 23, второе – при минимальном значении 45. Поэтому в качестве ответа выбираем наименьшее из двух – 23.

У этой задачи возможно интересное продолжение – давайте найдем **все решения, меньшие 100**. Сначала найдём все решения уравнения $A \rightarrow Z_{23} = 1$. Учитывая, что

разряды 6 5 4 3 2 1 0

$$23 = 0010111$$

биты 0, 1, 2 и 4 нужно обязательно сохранить. К ним можно добавить бит 3 (получается $23+8=31$), бит 5 ($23+32=55$), биты 4 и 5 ($23+32+8=63$), бит 6 ($23+64=87$), биты 6 и 3 ($23+64+8=95$), остальные подходящие значения больше 100.

Теперь найдём все решения уравнения $A \rightarrow Z_{45} = 1$. Запишем 45 в двоичной системе счисления:

разряды 6 5 4 3 2 1 0

$$45 = 0101101$$

Рассуждая аналогично, добавляем биты 1 ($45+2=47$), 4 ($45+16=61$), 4 и 1 ($45+16+2=63$), остальные значения получаются больше 100.

В итоге получается такой список всех возможных значений a , меньших 100:

$$23, 31, 45, 47, 55, 61, 63, 87, 95.$$

Литература

1. К.Ю. Поляков, Множества и логика в задачах ЕГЭ // Информатика, № 10, 2015, с. 38-42.
2. К.Ю. Поляков, Битовые операции в задачах КИМ ЕГЭ по информатике. Электронный ресурс [URL: <http://kpolyakov.spb.ru/download/bitwise.pdf>] Дата обращения: 06.11.2016.